MECÂNICA GERAL - 2/2009

LISTA 10

1. Escreva a Lagrangeana para um cilindro de massa m, raio R e momento de inércia I que rola sem deslizar sobre um plano inclinado de um ângulo α com relação à horizontal. Use a distância percorrida pelo cilindro a partir do ponto mais alto do plano x como coordenada generalizada. Obtenha a equação de Lagrange e resolva-a para achar a aceleração do centro de massa do cilindro $\ddot{x}$. Lembre que $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, onde v é a velocidade do centro de massa do cilindro e ω é sua velocidade angular.

2. Use o método Lagrangeano para obter a aceleração da máquina de Atwood levando em conta o momento de inércia da roldana I. Lembre que a energia cinética da roldana é $\frac{1}{2}I\omega^2$, onde ω é sua velocidade angular.

3. Escreva a Lagrangeana para um pêndulo simples de comprimento l, suspenso do teto de um elevador que acelera para cima com aceleração constante a. (Tome cuidado ao escrever a energia cinética; é mais seguro escrever a velocidade em termos das componentes cartesianas primeiro). Obtenha as equações de Lagrange e mostre que elas são iguais às do pêndulo simples sem aceleração, exceto pelo fato de que g deste último é substituído por $g+a$. Mostre que a frequência de pequenas oscilações é $\sqrt{(g+a)/l}$.

4. Considere uma dupla máquina de Atwood construída como segue: uma massa $4m$ é suspensa de um fio que passa sobre uma roldana de massa desprezível e sem atrito. A outra extremidade do fio está ligada a outra roldana igual a primeira, sobre a qual passa um segundo fio que suporta uma massa de $3m$ numa extremidade e m na outra. Quantos graus de liberdade tem este sistema? Escreva a Lagrangeana e use as equações de Lagrange para encontrar a acelaração da massa $4m$ quando o sistema for abandonado a partir do repouso. Explique porque a roldana de cima gira, mesmo carregando pesos iguais de cada lado.

5. Considere um pêndulo simples de comprimento l cujo ponto de suspensão P está preso a um ponto da periferia de uma roda vertical, de centro O e raio R, que é forçada a girar com velocidade angular constante ω em torno de um eixo que passa por O e é perpendicular ao plano da roda. Em $t = 0$, o ponto P está na mesma altura que o ponto O. Escreva a Lagrangeana e encontre a equação de Lagrange para o ângulo ϕ entre o fio do pêndulo e a vertical. Verifique se sua equação está de acordo com o que deve acontecer se $\omega = 0$.

6. Considere o problema bem conhecido de um carrinho de massa m que se move sem atrito sobre o eixo x ligado à extremidade de uma mola de constante elástica k cuja outra extremidade está presa. Se desprezarmos a massa da mola, como sempre fazemos, sabemos que o carrinho vai executar um movimento harmônico simples (MHS) com frequência angular $\omega = \sqrt{k/m}$. Usando a formulação lagrangeana podemos levar em conta o efeito da massa M da mola da seguinte forma:
(a) Suponha que a massa da mola esteja uniformemente distribuída e que ela se distenda também uniformemente e prove que a energia cinética da mola é $\frac{1}{6}M\dot{x}^2$, onde x é a distensão da mola a partir de sua posição de equilíbrio. Escreva a Lagrangeana do sistema. (A energia potencial continua sendo $\frac{1}{2}kx^2$).
(b) Escreva as equações de Lagrange e mostre que o carrinho executa MHS com frequência angular

$\omega = \sqrt{k/(m + M/3)}$ - isto é, o efeito da massa M da mola é simplesmente somar $M/3$ à massa do carrinho.

7. Considere dois objetos de massas m_1 e m_2 que se movem num campo gravitacional uniforme $\vec{g}$ e interagem através de uma energia potencial $U(r)$.
(a) Mostre que a Lagrangeana deste sistema pode ser decomposta em duas parcelas, uma ligada ao movimento do centro de massa (CM) do sistema e outra à posição relativa $\vec{r}$.
(b) Escreva as equações de Lagrange para as coordenadas do CM X, Y e Z e descreva o movimento do CM.
(c) Escreva as equações de Lagrange para as coordenadas relativas e mostre que o movimento de $\vec{r}$ é o mesmo que o de uma partícula de massa igual à massa reduzida μ, com posição $\vec{r}$ e energia potencial $U(r)$.

8. Duas partículas de massas m_1 e m_2 estão ligadas por uma mola de massa desprezível, comprimento natural L e constante elástica k. No início, m_2 está em repouso sobre uma mesa e m_1 está sendo segura a uma altura L na vertical de m_2. No instante $t = 0$, m_1 é atirada verticalmente para cima com velocidade inicial v_0. Encontre as posições das duas partículas em função de t (antes que qualquer uma delas retorne à mesa) e descreva seus movimentos. Suponha v_0 pequeno o suficiente para que não haja colisão entre as partículas.